VOYAGE AUTOUR DE SATURNE

En Juillet 2004, la sonde européenne Cassini-Huygens nous a livré ses premiers clichés des anneaux de Saturne.

Elle a également photographié Titan, le plus gros satellite de Saturne, situé à une distance R_T de Saturne. L'excentricité orbitale des satellites étant très faible, on supposera leurs trajectoires circulaires.

Dans tout l'exercice, on se place dans le référentiel saturno-centrique, centré sur Saturne et dont les trois axes sont dirigés vers trois étoiles lointaines supposées fixes.
On considère que la planète Saturne et ses satellites sont des corps dont la répartition des masses est à symétrie sphérique. Les rayons des orbites des satellites sont supposés grands devant leur taille.

<u>Données :</u> $G = 6{,}67\times10^{-11}$ S.I. : constante de gravitation universelle.

Concernant Titan : $R_T = 1{,}22\times10^{6}$ km (rayon de l'orbite de Titan).

Concernant Saturne : $R_S = 6{,}0\times10^{4}$ km (rayon de la planète Saturne).

T_S = 10 h 39 min (période de rotation de Saturne sur elle-même).

$M_S = 5{,}69\times10^{26}$ kg (masse de Saturne).

1. <u>Quelques caractéristiques de Titan :</u>

1.1. Forces

On considère que la seule force gravitationnelle exercée sur Titan provient de Saturne.

1.1.1. Nommer la (les) force(s) extérieure(s) appliquée(s) au satellite Titan, de masse M_T.

1.1.2. Représenter qualitativement sur un schéma, Saturne, Titan, et la (les) force(s) extérieure(s) appliquée(s) sur Titan.

1.1.3. Donner l'expression vectorielle de cette (ces) force(s).

1.2. Accélération et vitesse

On étudie le mouvement du centre d'inertie T de Titan. S est le centre d'inertie de Saturne.
Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire porté par la droite ST dirigé de S vers T.

1.2.1. Exprimer son accélération vectorielle $\vec{a}$ en précisant la loi utilisée.

1.2.2. On se place dans la base orthonormée $(\vec{t}, \vec{n})$ centrée en T dans laquelle $\vec{t}$ est un vecteur unitaire porté par la tangente à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement et $\vec{n}$ un vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{t}$ et dirigé vers l'intérieur de la trajectoire ($\vec{n} = -\vec{u}$).
On donne l'expression de $\vec{a}$ dans la base orthonormée $(\vec{t}, \vec{n})$: $\vec{a} = a_t\,\vec{t} + a_n\,\vec{n}$.
Donner les expressions littérales de a_t et de a_n en fonction de la vitesse v du satellite.

1.2.3. À quelle composante se réduit l'accélération vectorielle $\vec{a}$ de Titan dans la base orthonormée $(\vec{t}, \vec{n})$? Compléter alors le schéma précédent, avec la base orthonormée $(\vec{t}, \vec{n})$ et l'accélération $\vec{a}$ de Titan.

1.3. Type de mouvement

1.3.1. Montrer que le mouvement de Titan est uniforme.

1.3.2. Retrouver l'expression de la vitesse de Titan sur son orbite autour de Saturne : $v = \sqrt{\frac{GM_S}{R_T}}$

2. D'autres satellites de Saturne :

Après le survol de Titan, la sonde Cassini a survolé le satellite Encelade en février 2005.
On peut considérer que dans le référentiel saturno-centrique, Encelade à un mouvement de révolution circulaire uniforme, dont la période (en jour terrestre), est $T_E = 1{,}37$ et le rayon est R_E.

2.1. Loi de Kepler

La relation qui lie la période T de révolution d'un satellite, sa vitesse v et le rayon R de son orbite est $T = \frac{2\pi R}{v}$. Sa vitesse de révolution autour de Saturne est donnée par : $v = \sqrt{\frac{GM_S}{R}}$.

2.1.1. Retrouver la troisième loi de Kepler $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$.

2.1.2. Utiliser la troisième loi de Kepler pour déterminer la valeur du rayon R_E de l'orbite d'Encelade.

3. Sonde saturno-stationnaire :

On cherche dans cette partie à déterminer l'altitude h à laquelle devrait se trouver la sonde Cassini pour être saturno-stationnaire (immobile au-dessus d'un point de l'équateur de Saturne).

3.1. Quelle condition doit-on avoir sur les périodes Ts (rotation de Saturne sur elle-même) et Tc (révolution de Cassini autour de Saturne) pour que la sonde soit « saturno-stationnaire »?

3.2. Altitude de la sonde

3.2.1. En utilisant la troisième loi de Kepler donnée à la question **2.1.1.** , montrer que l'altitude h de la sonde peut se calculer avec la relation: $h = \sqrt[3]{\frac{T_C^2 GM_S}{4\pi^2}} - R_S$

3.2.2. Calculer la valeur de h.